Mecanismos - 1ª Avaliação

09/03/2023

Nota:

Aluno: _____

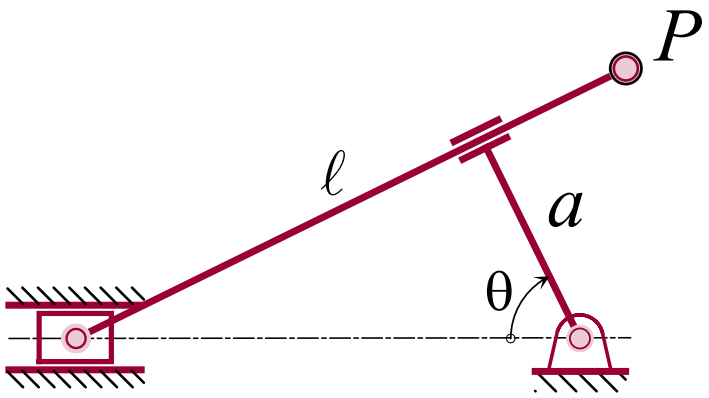
1. Para uma cadeia imposta, considerando que hajam apenas barras binárias e barras de máxima ordem (n_k), mostre que não é possível a formação desta cadeia para n_k diferente de 2. Tome como base a equação 3.15, reproduzida a seguir.

$$n_2 = 4 + \sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}} (i-3)n_i$$

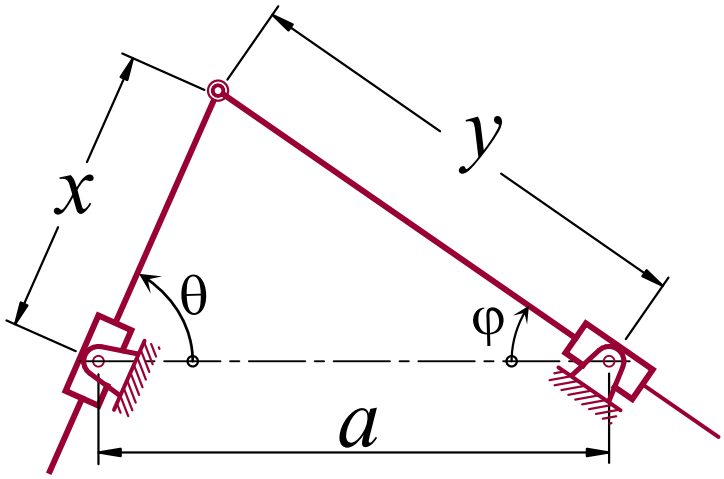
Obs.:

Após encontrar o valor de n_2 em função de n_k, na eq. acima, analise o valor de n como sendo a soma de n_2 + n_k.

2. Na cadeia mostrada, a barra ℓ é sempre perpendicular a barra a, esta tem θ para coordenada principal. Obtenha as expressões para o deslocamento, velocidade e aceleração do ponto **P** em função apenas da coordenada principal e da geometria do problema, ou seja, além das variáveis principais θ, $\dot{\theta}$, e $\ddot{\theta}$, e dos parâmetros constantes "a" e "ℓ", não deverão haver outras variáveis nas expressões decorrentes.



3. A cadeia mostrada tem dois graus de liberdade, tendo θ e x para coordenadas principais, sendo portanto (θ, x, φ, y) o sistema de coordenadas generalizadas. Desta forma, determine o deslocamento, velocidade e aceleração para a coordenadas secundária "y".



Pesos:

A primeira questão tem peso 2, a segunda questão tem peso 4 e a terceira questão tem peso 4.

Cadeias Impostas

Deslocamento

$$\begin{cases} f_1(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ f_2(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_n(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \end{cases}$$

Velocidade

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \frac{\partial f_n}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\dot{q} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}$$

Aceleração

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix} = \frac{d}{dq}\mathbf{K} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \vdots \\ \ddot{s}_n \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K} + \dot{q}^2\mathbf{L}$$

Cadeias Não Impostas

Obtenção dos F's e K's

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_i} \end{Bmatrix}, i = 1 \ldots m \text{ e } \mathbf{K}_i = \begin{Bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}_i$$

Onde

$$k_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial q_j}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{K}_i\dot{q}_i \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m}(\ddot{q}_i\mathbf{K}_i + \dot{q}_i^2\mathbf{L}_i)$$

Onde

$$\mathbf{L}_i = \frac{1}{\dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial s_k}\dot{s}_k\right)$$

Específico - Cadeias com Dois Graus de Liberdade e Cinco Barras

$$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{\dot{q}_1}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{L}_2 = \frac{1}{\dot{q}_2}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

Ponto Acoplador

Deslocamento

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Coeficiente de Velocidade

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_o + k_s \begin{bmatrix} -\sin s & -\cos s \\ \cos s & -\sin s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} = \dot{q}\mathbf{K}_p \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{X}}_p = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K}_p + \dot{q}^2\mathbf{L}_p$$

Onde

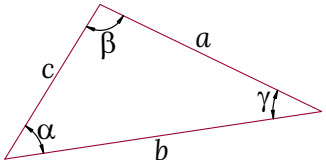
$$\mathbf{L}_p = \frac{d}{dq}\mathbf{K}_p$$

Expressões Trigonométricas

Soma e subtração de arcos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Lei dos senos



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$

Álgebra Matricial

Inversão de Matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Operações em bloco

$$\left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \hdashline k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \hdashline f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{41} \end{Bmatrix} \cdot k_1 - \begin{Bmatrix} a_{32} \\ a_{42} \end{Bmatrix} \cdot k_2\right)$$

Gabarito

Questão 1

Como determina o enunciado da questão, n_i será nulo para qualquer i diferente de k, então a expressão 3.15 vai nos fornecer:

$$\begin{aligned} n_2 &= 4 + (\frac{n}{2} - 3)n_k \\ &= 4 + \frac{n}{2}n_k - 3n_k \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como o problema afirma existirem apenas barras binárias e barras de ordem n_k, se somarmos n_k a última linha da equação (1.1), vamos obter:

$$n = 4 + \frac{n}{2}n_k - 2n_k \tag{1.2}$$

Consequentemente,

$$n = 4\left(\frac{2 - n_k}{2 - n_k}\right) \tag{1.3}$$

É imediato que a equação (1.3) fornece, para n, o valor 4 para qualquer valor de n_k diferente de dois, o que é um contra senso, pois a equação (1.1) mostra que quando n for igual a 4 o valor de n_k tem que ser nulo, dado que a única cadeia imposta com 4 barras tem n_2 = 4. A conclusão imediata é que n_k não pode assumir nenhum valor à exceção de 2, e veremos logo abaixo a análise de n_k = 2.

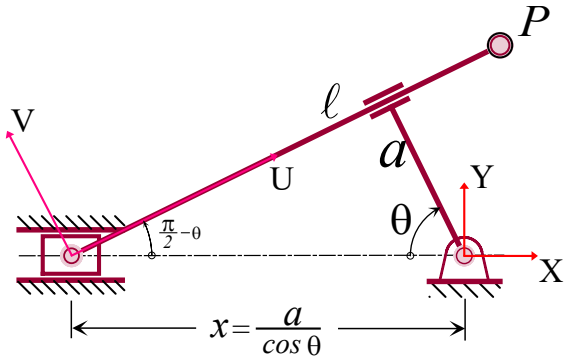
Quando n_k for igual a dois, podemos utilizar a equação (1.2), obtendo

$$n = n \tag{1.4}$$

Como consequência se n_k for igual a dois, n pode ser qualquer valor par maior que 4, é claro.

Questão 2

Uma das possibilidades seria a montagem dos sistemas global e local como mostrado na figura abaixo.



E teríamos então a equação

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) & -\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - \theta) & \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ell \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

Ou seja

$$\begin{cases} x_p = -\frac{a}{\cos\theta} + \ell\,\text{sen}\,\theta \\ y_p = \ell\,\cos\theta \end{cases} \tag{2.2}$$

Derivando no tempo, iremos obter as velocidades:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = -a\dot{\theta}\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta} + \ell\,\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_p = -\ell\,\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \tag{2.3}$$

Derivando, mais uma vez no tempo, teremos as acelerações:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = -a\ddot{\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} - a\dot{\theta}^2\frac{\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta+2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^4\theta} + \ell\,\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta \\ \ddot{y}_p = -\ell\,\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta - \ell\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases} \tag{2.4}$$

Questão 3

Coordenadas Generalizadas, fornecidas

$$(\theta, x, \varphi, y) \tag{3.1}$$

Equações de restrição

$$\begin{cases} x\cos\theta + y\cos\varphi - a = 0 \\ x\operatorname{sen}\theta - y\operatorname{sen}\varphi = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Deslocamento

Dividindo-se a segunda linha pela primeira, obtemos o deslocamento φ.

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x\operatorname{sen}\theta}{a - x\cos\theta}\right) \tag{3.3}$$

De posse de φ, podemos calcular y.

$$y = x\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi} \tag{3.4}$$

Velocidade

$$\mathbf{F}_\theta = \begin{Bmatrix} -x\operatorname{sen}\theta \\ x\cos\theta \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F}_x = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -y\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ -y\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

E então

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{y}\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \\ y\cos\varphi & -y\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Logo

$$\mathbf{K}_\theta = -\frac{1}{y}\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \\ y\cos\varphi & -y\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} -x\operatorname{sen}\theta \\ x\cos\theta \end{Bmatrix} = -\frac{1}{y}\begin{Bmatrix} x\cos(\theta+\varphi) \\ -y\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

e

$$\mathbf{K}_x = -\frac{1}{y}\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \\ y\cos\varphi & -y\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix} = -\frac{1}{y}\begin{Bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \\ y\cos(\theta+\varphi) \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

Desta forma, então:

$$\begin{aligned} k_{\theta y} &= x\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \\ k_{xy} &= -\cos(\theta+\varphi) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Obtidos os parâmetros $k_{\theta y}$ e k_{xy}, podemos montar a expressão para a velocidade da coordenada "y".

$$\dot{y} = k_{\theta y}\dot{\theta} + k_{xy}\dot{x} \tag{3.10}$$

Aceleração

$$\mathbf{L}_\theta = \frac{1}{\dot{\theta}}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{\theta\varphi}}{\partial\theta} & \frac{\partial k_{\theta\varphi}}{\partial x} \\ \frac{\partial k_{\theta y}}{\partial\theta} & \frac{\partial k_{\theta y}}{\partial x} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} & \frac{\partial k_{\theta\varphi}}{\partial y} \\ \frac{\partial k_{\theta y}}{\partial\varphi} & \frac{\partial k_{\theta y}}{\partial y} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}\right) \tag{3.11}$$

E

$$\mathbf{L}_x = \frac{1}{\dot{x}}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{x\varphi}}{\partial\theta} & \frac{\partial k_{x\varphi}}{\partial x} \\ \frac{\partial k_{xy}}{\partial\theta} & \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{x\varphi}}{\partial\varphi} & \frac{\partial k_{x\varphi}}{\partial y} \\ \frac{\partial k_{xy}}{\partial\varphi} & \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}\right) \tag{3.12}$$

Então, como não nos interessam os valores de $\ell_{\theta\varphi}$ e de $\ell_{x\varphi}$, podemos desconsiderar as derivadas nestes termos:

$$\mathbf{L}_\theta = \frac{1}{\dot{\theta}}\left(\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ x\cos(\theta+\varphi) & \operatorname{sen}(\theta+\varphi) \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{x}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ x\cos(\theta+\varphi) & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{y}\end{Bmatrix}\right) \tag{3.13}$$

E

$$\mathbf{L}_x = \frac{1}{\dot{x}}\left(\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \operatorname{sen}(\theta+\varphi) & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{x}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \operatorname{sen}(\theta+\varphi) & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{y}\end{Bmatrix}\right) \tag{3.14}$$

De onde podemos obter:

$$\begin{aligned} \ell_{\theta y} &= x\cos(\theta+\varphi) + x\tfrac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}}\cos(\theta+\varphi) + \tfrac{\dot{x}}{\dot{\theta}}\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \\ \ell_{xy} &= \tfrac{\dot{\theta}}{\dot{x}}\operatorname{sen}(\theta+\varphi) + \tfrac{\dot{\varphi}}{\dot{x}}\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \end{aligned} \tag{3.15}$$

E, reagrupando os termos, vamos ter, finalmente:

$$\begin{aligned} \ell_{\theta y} &= \tfrac{\dot{x}}{\dot{\theta}}\operatorname{sen}(\theta+\varphi) + x(\tfrac{\dot{\theta}+\dot{\varphi}}{\dot{\theta}})\cos(\theta+\varphi) \\ \ell_{xy} &= \tfrac{\dot{\theta}+\dot{\varphi}}{\dot{x}}\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ficando para a aceleração da coordenada secundária "y", a expressão:

$$\ddot{y} = k_{\theta y}\ddot{\theta} + k_{xy}\ddot{x} + \ell_{\theta y}\dot{\theta}^2 + \ell_{xy}\dot{x}^2 \tag{3.17}$$